

VYŠŠÍ ODBORNÁ ŠKOLA, STŘEDNÍ ŠKOLA,  
CENTRUM ODBORNÉ PŘÍPRAVY



# ABSOLVENTSKÁ PRÁCE

Model a řízení inverzního kyvadla

Sezimovo Ústí, 2014

Autor: Jakub Vacek





## ZADÁNÍ ABSOLVENTSKÉ PRÁCE

Student: **Jakub Vacek**  
Obor studia: 26-41-N/01 Elektrotechnika – mechatronické systémy  
Název práce: **Model a řízení inverzního kyvadla**  
Anglický název práce: **Inverted pendulum model and control**

### Zásady pro vypracování:

1. Vytvořte počítačový model systému inverzního kyvadla v prostředí Matlab/Simulink.
2. Vytvořte virtuální scénu k modelu inverzního kyvadla.
3. Proveďte identifikaci modelu a ověřit zda chování modelu odpovídá reálnému systému.
4. Navrhněte regulátor, který dokáže přemísťovat vozík s kyvadlem v dolní poloze.
5. Navrhněte regulátor, který dokáže přemísťovat vozík s kyvadlem v horní poloze.
6. Vytvořte demo regulátor pro prezentace typu den otevřených dveří apod.
7. Absolventskou práci vypracujte problémově ve struktuře odpovídající vědecké práci.


### Doporučená literatura:

- [1] HANZLÍK, J. Distribuovaný řídicí systém s automaty Rockwell Automation, (Diplomová práce), ČVUT v Praze, FEL, Praha, 2008.
- [2] ROUBAL, J., HUŠEK, P. A KOL. (2011) *Regulační technika v příkladech*. Praha: BEN – technická literatura, 2010, ISBN 978-80-7300-260-2.
- [3] Roubal, J. Přednášky a příklady k předmětům na VOŠ [online], [cit. 2012-09-01], <http://apps.copsu.cz/moodleVOS/>.
- [4] Jelínek, J., *Model RC článku na počítači*, (Prezentace VOŠ) VOŠ, SŠ, COP Sezimovo Ústí, 2012.


Vedoucí práce: Ing. Jiří Roubal, Ph.D., VOŠ, SŠ, COP, Sezimovo Ústí  
Odborný konzultant práce: Ing. Jan Fuka, VOŠ, SŠ, COP, Sezimovo Ústí  
Oponent práce: Ing. Jiří Bumba, VOŠ, SŠ, COP, Sezimovo Ústí

Datum zadání absolventské práce: **2.9.2013**

Datum odevzdání absolventské práce: **30.4.2014**

  
.....  
Ing. Jiří Roubal, Ph.D.  
(vedoucí práce)



  
.....  
Ing. František Kamlach  
(ředitel školy)

V Sezimově Ústí dne 2.9.2013



## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou absolventskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady (literaturu, projekty, SW atd.) uvedené v příloženém seznamu.

V Sezimově Ústí dne 14.5.2014

Vacek  
podpis

## **Poděkování**

Děkuji především vedoucímu absolventské práce Ing. Jiřímu Roubalovi za trpělivé vedení, cenné rady a čas, který věnoval mé práci. Děkuji svým blízkým za podporu během studia.

## Anotace

Tato absolventská práce se zabývá identifikací systému inverzního kyvadla a návrhem regulátoru, který dokáže přemísťovat vozík s ramenem kyvadla v dolní, respektive horní poloze. Nejprve je vytvořen počítačový model v programovém prostředí MATLAB/Simulink. Dále jsou určeny neznámé parametry systému a provedena linearizace modelu. Poté jsou pomocí geometrického místa kořenů navrženy regulátory. K regulaci systému jsou použity regulátory typu PD a PID.

**Klíčová slova:** Inverzní kyvadlo, matematicko-fyzikální model, systém, PID, GMK, linearizace, diferenciální rovnice, Simulink, MATLAB, měřící karta M624.

## Annotation

This graduate thesis deals with identification of an inverted pendulum and with design of controller which is capable to control car with pendulum in lower and upper position. As first the virtual model is created in program environment MATLAB/Simulink. Next the unknown parameters of system are obtained and linearized model is created. Root locus is used to design PD and PID controllers which controls the system.

**Key words:** Inverted pendulum, mathematics-physical model, system, PID, GMK, linearization, differential equation, Simulink, MATLAB, measuring card MF 624.





# Obsah

Seznam použitých symbolů	ix
Seznam obrázků	xi
Seznam tabulek	xiii
<b>1 Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Tvorba modelu a jeho identifikace</b>	<b>3</b>
2.1 Vstupy a výstupy systému . . . . .	4
2.1.1 Statické převodní charakteristiky snímačů . . . . .	4
2.1.1.1 Statická převodní charakteristika snímače úhlu kyvadla . . . . .	5
2.1.1.2 Statická převodní charakteristika snímače polohy vozíku . . . . .	6
2.2 Tvorba modelu v programu Simulink . . . . .	7
2.3 Kvalitativní ověření správné funkce modelu . . . . .	8
2.4 Identifikace systému . . . . .	10
2.4.1 Statická převodní charakteristika akčního členu . . . . .	11
2.4.2 Identifikace přenosu motoru s vozíkem . . . . .	14
2.4.3 Identifikace konstant kyvadla . . . . .	18
2.5 Verifikace modelu . . . . .	20
<b>3 Linearizace</b>	<b>21</b>
3.1 Stavový model systému . . . . .	21
3.2 Určení pracovního bodu . . . . .	22
3.3 Linearizace pomocí Taylorova polynomu 1. stupně . . . . .	24
<b>4 Regulace pomocí PID regulátoru</b>	<b>27</b>
4.1 Regulátor výchylky $\varphi$ pro rameno kyvadla v dolní poloze . . . . .	28

4.2	PD regulátor výchylky $x$ pro dolní polohu . . . . .	29
4.3	Regulace v dolní poloze – aplikace na reálný systém . . . . .	29
4.4	Regulátor výchylky $\varphi$ pro rameno kyvadla v horní poloze . . . . .	32
4.5	PD regulátor výchylky $x$ pro horní polohu . . . . .	33
4.6	PID regulátor výchylky $x$ pro rameno kyvadla v horní poloze . . . . .	33
4.7	Regulace v horní poloze – aplikace na reálný systém . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>37</b>
	<b>Literatura</b>	<b>39</b>
<b>A</b>	<b>Obsah přiloženého CD/DVD</b>	<b>I</b>
<b>B</b>	<b>Použitý software</b>	<b>III</b>
<b>C</b>	<b>Časový plán absolventské práce</b>	<b>V</b>

# Seznam použitých symbolů

Symbol	Význam	Jednotka
$a$	zrychlení	$\text{ms}^{-2}$
$B$	koeficient tření motoru	$\text{kg m}^2 \text{V}^{-1}$
$g$	tíhové zrychlení	$\text{ms}^{-2}$
$J$	moment setrvačnosti motoru a vozíku	$\text{kg m}^2$
$k$	konstanta motoru	$\text{kg m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-2}$
$l$	délka ramena kyvadla	m
$r$	poloměr ozubeného kola motoru	m
$u$	elektrické namětí	V
$v$	rychlost vozíku	$\text{ms}^{-1}$
$t$	čas	s
$\Delta x$	přírůstek dráhy	m
$\Delta t$	přírůstek času	s
$\delta$	koeficient útlumu kyvadla	$\text{s}^{-1}$
$\varphi$	úhel naklonění ramena kyvadla	rad
$\omega$	otáčky motoru	$\text{s}^{-1}$



# Seznam obrázků

1.1	Systém inverzního kyvadla . . . . .	2
2.1	Systém inverzního kyvadla . . . . .	3
2.2	Schématičký náčrt laboratorního modelu . . . . .	4
2.3	Statická převodní charakteristika snímače úhlu kyvadla . . . . .	5
2.4	Statická převodní charakteristika snímače polohy vozíku . . . . .	6
2.5	Simulinkové schéma . . . . .	6
2.6	Simulinkové schéma modelu motoru a vozíku . . . . .	7
2.7	Simulinkové schéma modelu ramene kyvadla . . . . .	7
2.8	Simulinkové schéma kompletního modelu inverzního kyvadla . . . . .	8
2.9	Odezva simulinkového modelu na vstupní skokový signál . . . . .	9
2.10	Vliv koeficientu tlumení $\delta$ na pohyb ramene . . . . .	10
2.11	Statická převodní charakteristika motoru s vozíkem . . . . .	13
2.12	Statická převodní charakteristika motoru s vozíkem (bez nelinearit) . . . . .	13
2.13	Statická převodní charakteristika motoru s vozíkem včetně nelinearit . . . . .	14
2.14	Průběh statické převodní charakteristiky motoru s vozíkem . . . . .	14
2.15	Odezva systému na vstupní skok . . . . .	15
2.16	Naměřená přechodová charakteristika motoru s vozíkem . . . . .	16
2.17	Přechodová charakteristika motoru s vozíkem . . . . .	17
2.18	Ověření identifikace motoru s vozíkem – simulinkové schéma . . . . .	18
2.19	Ověření identifikace motoru s vozíkem – odezva systému . . . . .	18
2.20	Odezva kyvadla při nehybném vozíku . . . . .	19
2.21	Odezva systému a simulinkového modelu na vstupní skokový signál . . . . .	20
3.1	Odezva nelineárního a lineárního modelu na vstupní skokový signál . . . . .	25
3.2	Odezva lineárního modelu na vstupní sinusový signál . . . . .	26
4.1	Struktura regulačního obvodu . . . . .	27

4.2	Simulinkové schéma regulačního odvodu . . . . .	30
4.3	Filtrace $W_x$ . . . . .	30
4.4	Regulace v dolní poloze . . . . .	31
4.5	Simulinkové schéma regulačního odvodu . . . . .	34
4.6	Regulace v horní poloze pomocí PD regulátoru . . . . .	35
4.7	Regulace v horní poloze pomocí PID regulátoru . . . . .	36

# Seznam tabulek

2.1	Statické převodní charakteristiky senzoru úhlu kyvadla . . . . .	5
2.2	Statické převodní charakteristiky senzoru polohy vozíku . . . . .	6
2.3	Testovací parametry modelu inverzního kyvadla . . . . .	9
2.4	Statická převodní charakteristika motoru s vozíkem . . . . .	12
2.5	Parametry modelu inverzního kyvadla . . . . .	19
4.1	Nuly a póly přenosu pro kyvadlo v dolní poloze $G_{\varphi_D}(s)$ . . . . .	28
4.2	Nuly a póly uzavřené vnitřní regulační smyčky pro kyvadlo v dolní poloze	28
4.3	Nuly a póly kompletní regulační smyčky pro kyvadlo v dolní poloze . . .	29
4.4	Nuly a póly přenosu pro kyvadlo v horní poloze $G_{\varphi_H}(s)$ . . . . .	32
4.5	Nuly a póly uzavřené vnitřní regulační smyčky pro kyvadlo v horní poloze	32
4.6	Nuly a póly kompletní regulační smyčky . . . . .	33
4.7	Nuly a póly kompletní regulační smyčky . . . . .	34





# Kapitola 1

## Úvod

V dnešní době je regulace pomocí PID regulátorů velmi rozšířená, používá se k regulaci jednoduchých i velmi složitých systémů. Tato práce řeší identifikaci a návrh regulátoru pro řízení jednoduchého nestabilního, nelineárního systému inverzního kyvadla. V praxi se tato problematika využívá například pro řízení náklonu raketoplánu a u vozítka Segeway.

Na Vyšší odborné škole, Střední škole, Centru odborné přípravy v Sezimově Ústí se nachází Laboratoř aplikované informatiky a fyziky. Výuka fyziky by byla bez praktických pokusů velmi obtížná. Z tohoto důvodu je laboratoř vybavena několika modely, zastupující různé fyzikální oblasti (proudění kapalin, přímočarý pohyb, rotační pohyb, elektřina), pro ověření teoretických znalostí při praktických pokusech. Tato laboratoř slouží k výuce modelování a řízení reálných systémů na vyšší odborné škole. Koncepce vychází ze zkušeností vedoucího této práce, získaných mimo jiné v Laboratoři teorie automatického řízení.

**Cílem** práce bylo vytvořit počítačový model systému inverzního kyvadla a navrhnout regulátor pro stabilizaci ramena kyvadla v dolní a horní poloze. Systém inverzního kyvadla je zobrazen na následujícím obrázku.

Pro návrh regulátorů je nutno znát matematicko-fyzikální model systému. Proto je nutno provést identifikaci systému, kdy je nejprve vytvořen počítačový model a poté určeny všechny neznámé konstanty systému. Kvalita regulace velmi záleží na přesnosti identifikace systému. Po vytvoření počítačového modelu byla ověřena správnost identifikace porovnáním odezvy reálného systému a počítačového modelu na jednotkový skok a další signály.

Po určení neznámých konstant systému bylo přistoupeno k návrhu regulátorů. Tato část je rozdělena na dvě části, první část se zabývá návrhem regulátoru pro řízení kyvadla v dolní poloze. Druhá část je věnována návrhu regulátoru pro řízení kyvadla v horní poloze.



Obrázek 1.1: Systém inverzního kyvadla

Struktura této práce, která je napsána v  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$ <sup>1</sup>, je následující. Kapitola 2 se zabývá identifikací systému inverzního kyvadla a vytvoření simulinkového modelu. Kapitola 3 popisuje linearizaci modelu. Kapitola 4 se věnuje návrhu řízení systému s kyvadlem v dolní a horní poloze. Kapitola 5 shrnuje a hodnotí výsledky práce. V příloze je uveden obsah příloženého DVD a použitý software.

---

<sup>1</sup> $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$  je rozšíření systému  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ , což je kolekce maker pro  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ .  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  je ochranná známka American Mathematical Society.

## Kapitola 2

# Tvorba modelu a jeho identifikace

Tato kapitola se zabývá identifikací systému inverzního kyvadla. Chronologicky popisuje úkony nutné k identifikaci systémů a vytvoření lineárního modelu, který dostatečně přesně popisuje reálný systém.

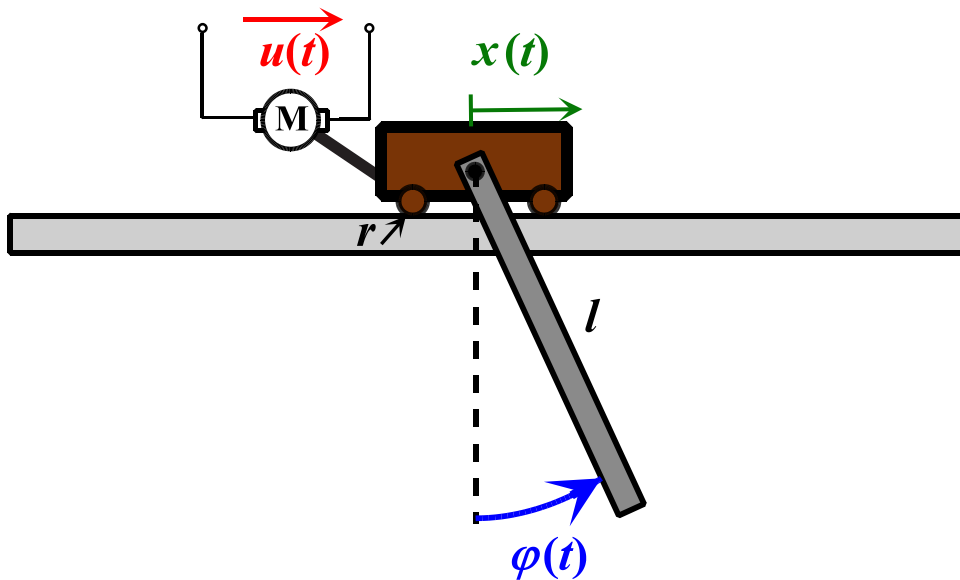
V první části je určena statická převodní charakteristika senzorů – převedeny unifikované signály na požadované fyzikální jednotky. Poté byl vytvořen simulinkový model. Dále byl určen přenos systému a pomocí přechodové charakteristiky získány neznámé konstanty modelu. Následně byl porovnán Simulinkový model s reálným systémem.



Obrázek 2.1: Systém inverzního kyvadla

## 2.1 Vstupy a výstupy systému

V oblasti modelování dynamických systémů se za vstupy daného systému považují veličiny nezávislé, za výstupy veličiny závislé. Vstupem systému inverzního kyvadla je tedy napětí stejnosměrného motoru  $u$  [V], výstupy jsou úhel natočení ramena kyvadla  $\varphi$  [°] a poloha vozíku  $x$  [m]. Schématický náčrt systému je na následujícím obrázku.



Obrázek 2.2: Schématický náčrt laboratorního modelu inverzního kyvadla  
(převzato z (ROUBAL, J., 2012))

### 2.1.1 Statické převodní charakteristiky snímačů

Signály měřené kartou MF 624 nejsou ve fyzikálních jednotkách odpovídající výstupům systému, nýbrž unifikované signály. Proto je třeba určit statické převodní charakteristiky snímačů a naprogramovat je v prostředí Simulink. Tím bude docíleno zobrazování měřených signálů v jejich fyzikálních jednotkách.

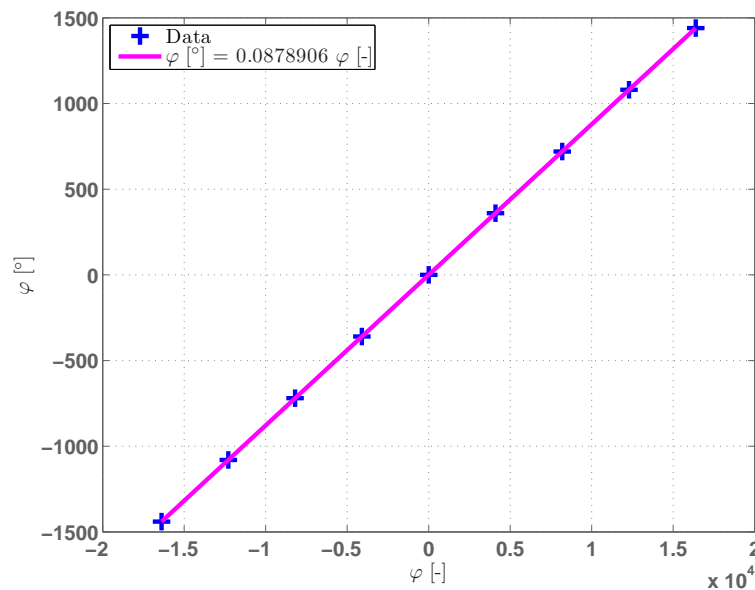
Měření je prováděno tak, že po zapnutí měření je výstupní veličina ručně změněna o známou hodnotu (u senzoru úhlu např. o 360°, u senzoru polohy např. o 0,15 m) a poté odečtena odpovídající hodnota v počítači. Tato data jsou vynesena do grafu, ze kterého je určena převodní funkce (statická převodní charakteristika snímače).

### 2.1.1.1 Statická převodní charakteristika snímače úhlu kyvadla

Před vlastním experimentem bylo kyvadlo ve svislé poloze. Poté bylo zapnuto měření v Simulinku a rameno bylo otočeno o jednu otáčku (+360°) ve směru hodinových ručiček. Snímač naměřil hodnotu −4096. Otočením ramena o jednu otáčku proti směru hodinových ručiček (−360°), snímač naměřil hodnotu +4096. Toto platí úměrně i pro více otáček, viz následující tabulka.

Tabulka 2.1: Statické převodní charakteristiky senzoru úhlu kyvadla

$\varphi [-]$	0	4096	8192	12288	16384	−4096	−8192	−12288	−16384
$\varphi [^\circ]$	0	360	720	1080	1440	−360	−720	−1080	−1440



Obrázek 2.3: Statická převodní charakteristika snímače úhlu kyvadla

Z obr. 2.3 plyne, že statická převodní charakteristika tohoto snímače je lineární. Pro převod měřených hodnot kartou MF 624 na úhlové stupně je třeba vypočítat, jaké číslo odpovídá jednomu úhlovému stupni. Z naměřených hodnot vyplývá, že jednomu úhlovému stupni odpovídá přibližně hodnota 11,377. Pro zobrazování úhlu v úhlových stupních je tedy nutno měřenou hodnotu vydělit číslem 11,377

$$\varphi [^\circ] = \frac{360}{4096} \varphi [-] = \frac{1}{11,377} \varphi [-] \doteq 0,0878906 \varphi [-]. \quad (2.1)$$

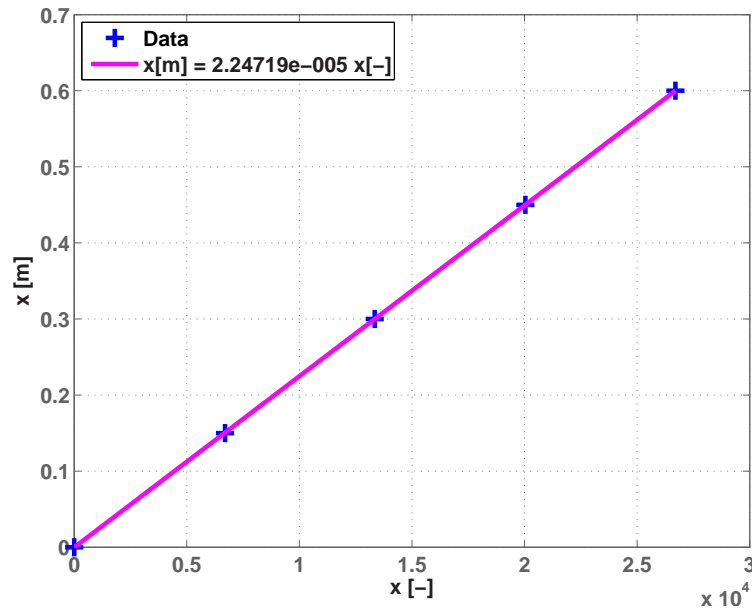
Tato funkce je naprogramována v Simulinku pomocí bločku **Gain**.

### 2.1.1.2 Statická převodní charakteristika snímače polohy vozíku

Podobným způsobem jako u snímače úhlu byla změřena statická převodní charakteristika snímače polohy vozíku. Naměřená data jsou v následující tabulce a vynesena do následujícího obrázku.

Tabulka 2.2: Statické převodní charakteristiky senzoru polohy vozíku

$x$ [-]	0	6700	13346	20037	26700
$x$ [m]	0	0,15	0,30	0,45	0,60

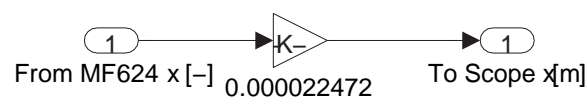


Obrázek 2.4: Statická převodní charakteristika snímače polohy vozíku

Odtud je převodní funkce pro polohu vozíku

$$x \text{ [m]} \doteq 0,000022472x \text{ [-]}. \quad (2.2)$$

Tato převodní funkce je naprogramována v prostředí Simulink prostřednictvím bločku Gain viz následující obrázek.



Obrázek 2.5: Simulinkové schéma

## 2.2 Tvorba modelu v programu Simulink

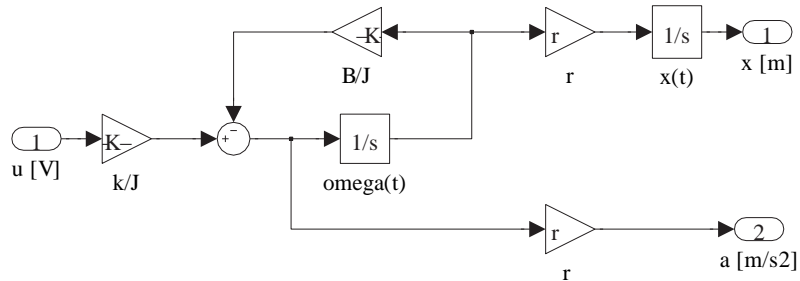
Chování systému inverzního kyvadla je popsáno diferenciálními rovnicemi z (ROUBAL, J., 2012)

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{B}{J}\omega(t) + \frac{k}{J}u(t), \quad (2.3)$$

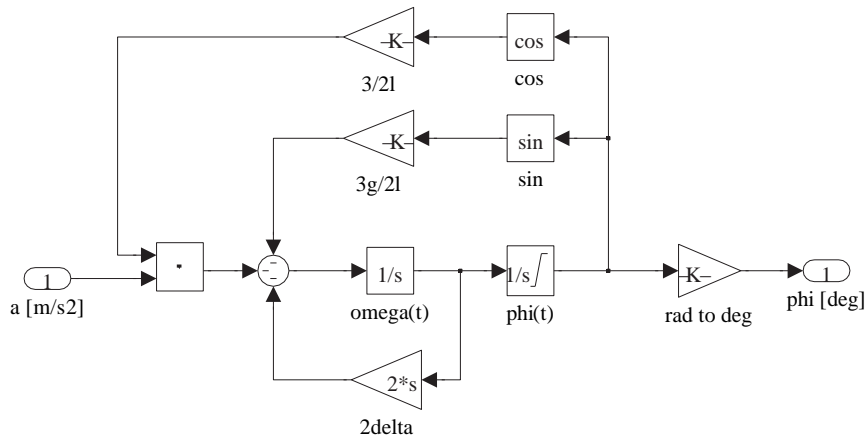
$$\frac{dx(t)}{dt} = r\omega(t), \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt} = -2\delta\frac{d\varphi(t)}{dt} - \frac{3g}{2l}\sin\varphi(t) - \frac{3}{2l}\left(-\frac{B}{J}\omega(t) + \frac{k}{J}u(t)\right)\cos\varphi(t), \quad (2.5)$$

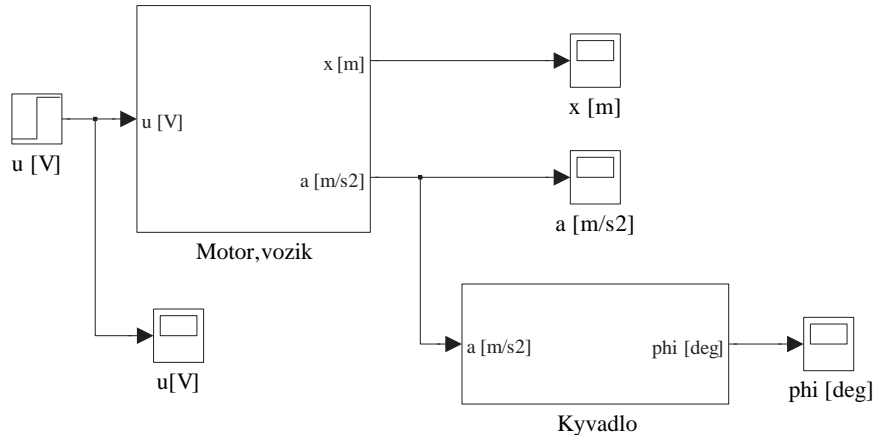
kde  $u$  [V] je napětí na motoru,  $\omega$  [ $s^{-1}$ ] jsou otáčky motoru,  $x$  [m] je poloha vozíku,  $\varphi$  [rad] je úhel naklonění ramena kyvadla,  $B$  [ $kg\ m^2\ V^{-1}\ s^{-2}$ ] je koeficient tření motoru,  $J$  [ $kg\ m^2$ ] je moment setrvačnosti motoru s vozíkem,  $k$  [ $kg\ m^2\ V^{-1}\ s^{-2}$ ] je konstanta motoru,  $r$  [m] je poloměr ozubeného kola motoru,  $l$  [m] je délka kyvadla,  $\delta$  [ $s^{-1}$ ] je koeficient útlumu kyvadla a  $g$  [ $ms^{-2}$ ] je tíhové zrychlení. Tyto rovnice byly přepsány do prostředí Simulink podle návodu v (ROUBAL, J., 2012). Simulinková schémata jsou na následujících obrázcích.



Obrázek 2.6: Simulinkové schéma modelu motoru a vozíku



Obrázek 2.7: Simulinkové schéma modelu ramene kyvadla



Obrázek 2.8: Simulinkové schéma kompletního modelu inverzního kyvadla

Postupně byly přepsány rovnice popisující chování motoru, vozíku a kyvadla, poté byla nastavena saturace integrátorů a další parametry. Model je opatřen maskou, která umožňuje měnit počáteční pozici vozíku, počáteční úhel ramena, počáteční rychlost ramena a všechny konstanty nacházející se v rovnicích. Na obr. 2.6 je zobrazeno simulinkové schéma vytvořené z prvních dvou rovnic, které popisují chování motoru a vozíku kyvadla. Vstupem je napětí  $u$  [V], výstupem pak poloha vozíku  $x$  [m], zrychlení vozíku  $a$  [ $\text{ms}^{-2}$ ]. Na obr. 2.7 je zobrazeno simulinkové schéma vytvořené z třetí a čtvrté rovnice, které popisují chování ramena kyvadla, kde vstupem je zrychlení vozíku  $a$  [ $\text{ms}^{-2}$ ], výstupem je úhel ramena kyvadla  $\varphi$  [°]. Model je doplněn o `Gain rad to o`, který převádí radiány na úhlové stupně. Na obr. 2.8 vidíme simulinkové schéma kompletního modelu vytvořené sloučením modelu motoru, vozíku a modelu kyvadla.

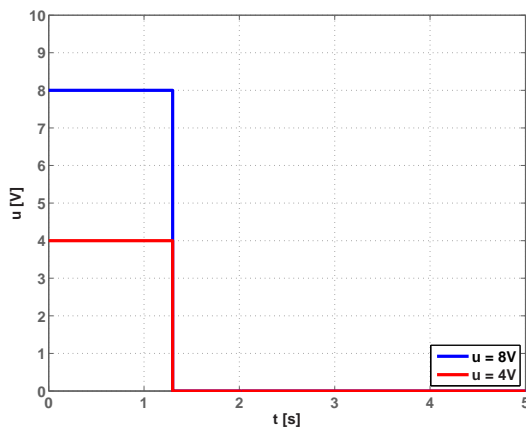
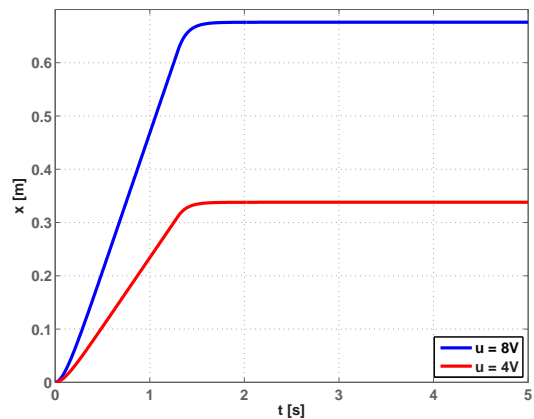
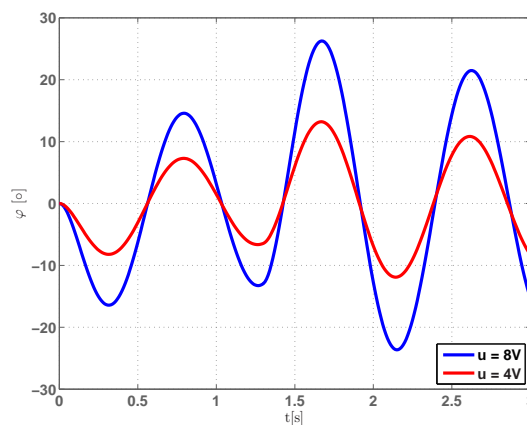
## 2.3 Kvalitativní ověření správné funkce modelu

Po vytvoření simulinkového modelu reálného systému je nutno ověřit, zda se model chová dle očekávání. Do masky byly vloženy konstanty  $g$ ,  $l$  a  $r$ , které je možné změřit na systému, nebo dohledat v matematicko-fyzikálních tabulkách. Hodnoty konstant  $B$ ,  $J$ ,  $k$  a  $\delta$ , které nyní nelze přesně určit, byly pouze odhadnuty. Hodnoty použitých konstant pro kvalitativní ověření modelu jsou v následující tabulce. Nasimulované průběhy jsou na následujících obrázcích.



Tabulka 2.3: Testovací parametry modelu inverzního kyvadla

Konstanta	Označení	Hodnota	Jednotka
Koeficient tření motoru	$B$	1	$\text{kg m}^2 \text{V}^{-1}$
Moment setrvačnosti motoru a vozíku	$J$	0,1	$\text{kg m}^2$
Konstanta motoru	$k$	5	$\text{kg m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-2}$
Poloměr ozubeného kola motoru	$r$	0,013	m
Délka ramena kyvadla	$l$	0,33	m
Koeficient útlumu kyvadla	$\delta$	0,2	$\text{s}^{-1}$
Tíhové zrychlení	$g$	9,81	$\text{ms}^{-2}$

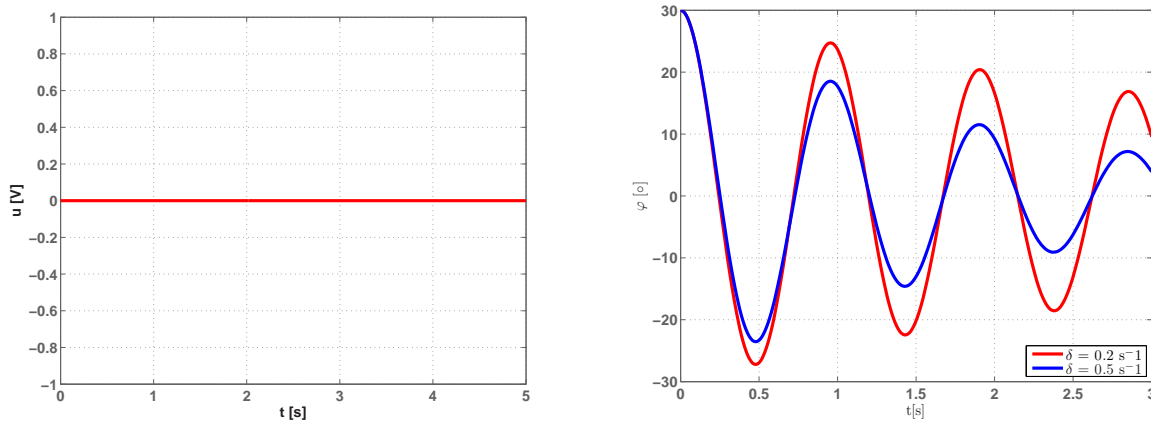
(a) napětí na motoru  $u$ (b) poloha vozíku  $x$ 

(c) úhel natočení ramena kyvadla

Obrázek 2.9: Odezva simulinkového modelu na vstupní skokový signál

Na obr. 2.9 je odezva simulinkového modelu pro dvě skokové změny vstupního napětí

dle obr. 2.9(a). Z těchto simulací je patrné, že pokud se vozík rozjede směrem doprava (viz obr. 2.9(b)), rameno kyvadla se v tomto okamžiku vychýlí proti směru pohybu vozíku (obr. 2.9(c)). Dále je z těchto simulací vidět, že větší vstupní napětí způsobí rychlejší pohyb vozíku a samozřejmě větší první vychýlení ramene kyvadla. Na následujícím obrázku je znázorněn vliv koeficientu útlumu kyvadla  $\delta$ . S rostoucí hodnotou  $\delta$  se vychylka ramene kyvadla rychleji tlumí.

(a) napětí na motoru  $u$ 

(b) úhel natočení ramene kyvadla

Obrázek 2.10: Vliv koeficientu tlumení  $\delta$  na pohyb ramene

Podobným způsobem byl analyzován vliv všech konstant modelu inverzního kyvadla. Z těchto simulací bylo vyvozeno, že se simulinkový model chová kvalitativně správně, to je odsimulované veličiny se pohybují v souladu s fyzikálními zákony. Je tedy možné model dále použít k následné identifikaci reálného systému.

## 2.4 Identifikace systému

Nyní bude přikročeno k identifikaci systému, to je k nalezení zatím neznámých konstant, které odpovídají reálnému systému. Nejprve bude určena statická převodní charakteristika akčního členu (motoru). Dále bude určen přenos mezi napětím motoru a polohou vozíku. Nakonec budou určeny konstanty kyvadla.

### 2.4.1 Statická převodní charakteristika akčního členu

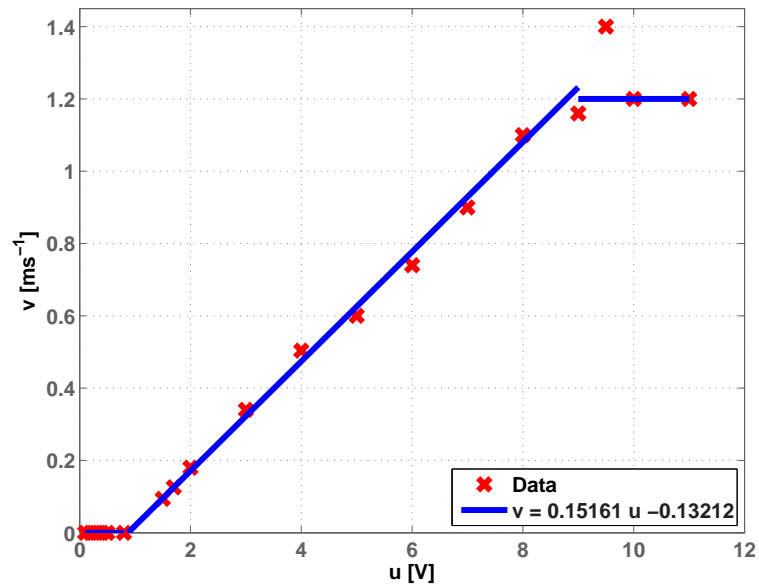
Při určování statické převodní charakteristiky akčního členu mezi vstupním napětím  $u$  [V] a rychlostí vozíku  $v$  [ $\text{m s}^{-1}$ ] se postupuje podobně jako u statické převodní charakteristiky senzorů. Vzhledem k tomu, že většina akčních členů není lineární (obsahuje pásmo necitlivosti a pásmo saturace) je potřeba proměřit celý rozsah vstupního napětí akčního členu. Toto měření je prováděno tak, že na vstup systému je přivedeno napětí  $u$  a po odeznění přechodových dějů je odečten přírůstek dráhy  $\Delta x$  [m] za přírůstek času  $\Delta t$  [s]. Z těchto hodnot lze, podle následujícího vzorce, vypočítat rychlost vozíku  $v$  [ $\text{m s}^{-1}$ ]

$$v(t) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}.$$

Těchto měření bylo provedeno celkem 20 tak, aby byl proměřen celý rozsah vstupního napětí. Naměřené hodnoty a vypočítaná rychlost jsou vypsány v následující tabulce a zobrazeny v následujícím obrázku.

Tabulka 2.4: Statická převodní charakteristika motoru s vozíkem

$\Delta t$ [s]	$u$ [V]	$\Delta x$ [m]	$v$ [m s <sup>-1</sup> ]
1,00	0	0	0
1,0	0,1	0	0
1,0	0,2	0	0
1,0	0,3	0	0
1,0	0,4	0	0
1,0	0,5	0	0
1,0	0,8	0	0
0,8	1,5	0,075	0,0937
0,8	1,7	0,1005	0,1256
0,8	2,0	0,144	0,1800
0,8	3,0	0,272	0,3400
0,8	4,0	0,403	0,5038
0,1	5,0	0,06	0,6000
0,1	6,0	0,074	0,7400
0,1	7,0	0,09	0,9000
0,1	8,0	0,11	1,1000
0,05	9,0	0,058	1,1600
0,05	9,5	0,07	1,4000
0,1	10,0	0,12	1,2000
0,05	11,0	0,06	1,2000



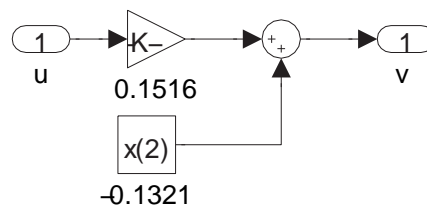
Obrázek 2.11: Statická převodní charakteristika motoru s vozíkem

Obrázek 2.11 zobrazuje závislost ustálené rychlosti vozíku  $v$  [ $\text{ms}^{-1}$ ] na vstupním napětí motoru  $u$  [V]. Na grafu je vidět, že motor má pásmo necitlivosti  $u \in \langle 0; 0,8 \rangle$  V a pásmo saturace pro  $u > 9$  V. Lineární část charakteristiky je přibližně v rozsahu  $u \in \langle 0,8; 9 \rangle$  V. Tuto lineární část je možno popsat rovnicí

$$v = 0,1516u - 0,1321,$$

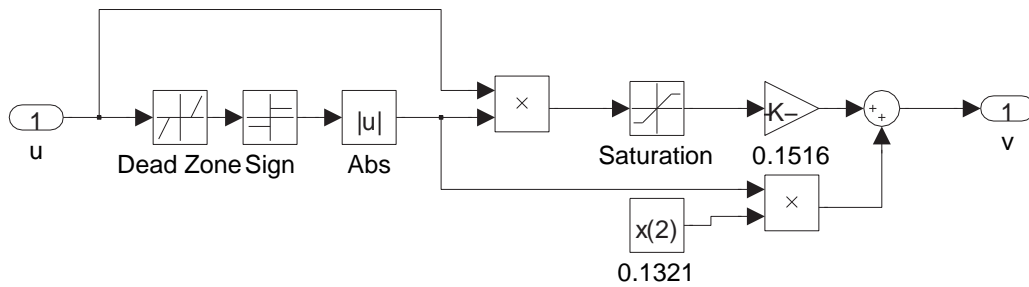
která byla určena metodou nejmenších čtverců z naměřených dat (ROUBAL, J. et al., 2011).

Tuto závislost je nutno přepsat do simulinkového modelu tak, aby model přesně odpovídal naměřeným hodnotám. Model je doplněn o bloček **Gain** 0.1516, který upravuje stoupání lineární části a dále o bloček **Constant** -0.1321. Simulinkové schéma upraveného modelu je zobrazeno na následujícím obrázku.

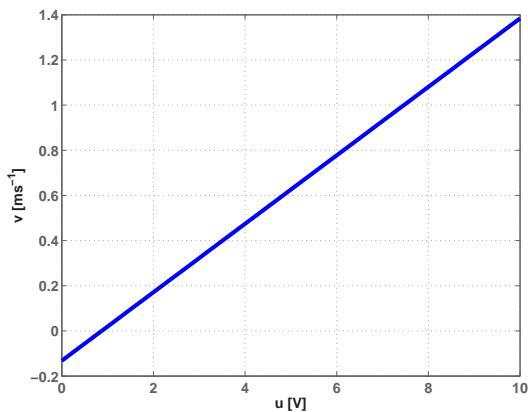


Obrázek 2.12: Statická převodní charakteristika motoru s vozíkem (bez nelinearit)

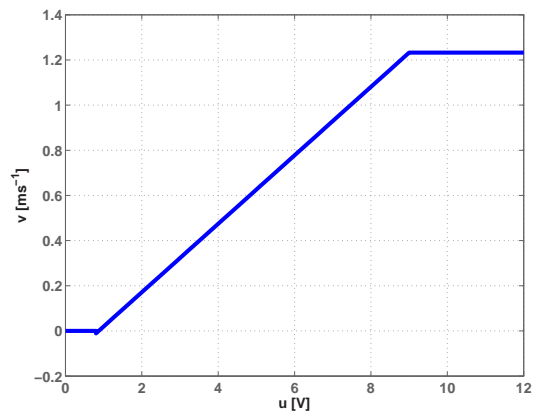
Na obr. 2.14(a) je zobrazena odpovídající statická převodní charakteristika, která ale ještě nerespektuje vstupní nelinearity (saturace a necitlivost). Proto bylo schéma upraveno podle obr. 2.13, který již tyto nelinearity respektuje. Toto simulinkové schéma bylo převzato z (ŠIKÝŘ, T., 2011).



Obrázek 2.13: Statická převodní charakteristika motoru s vozíkem včetně nelinearit



(a) lineární část



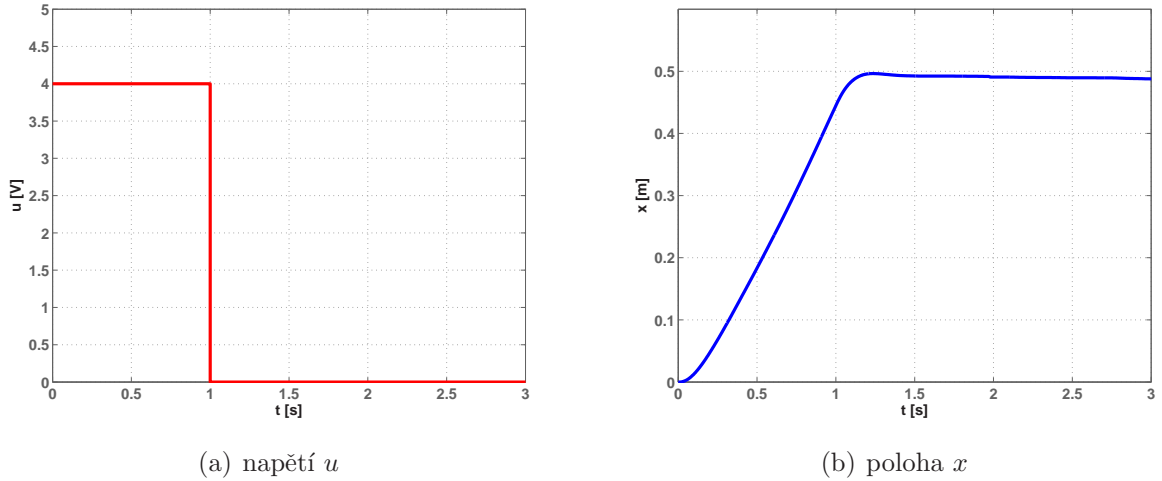
(b) saturace a necitlivost

Obrázek 2.14: Průběh statické převodní charakteristiky motoru s vozíkem

## 2.4.2 Identifikace přenosu motoru s vozíkem

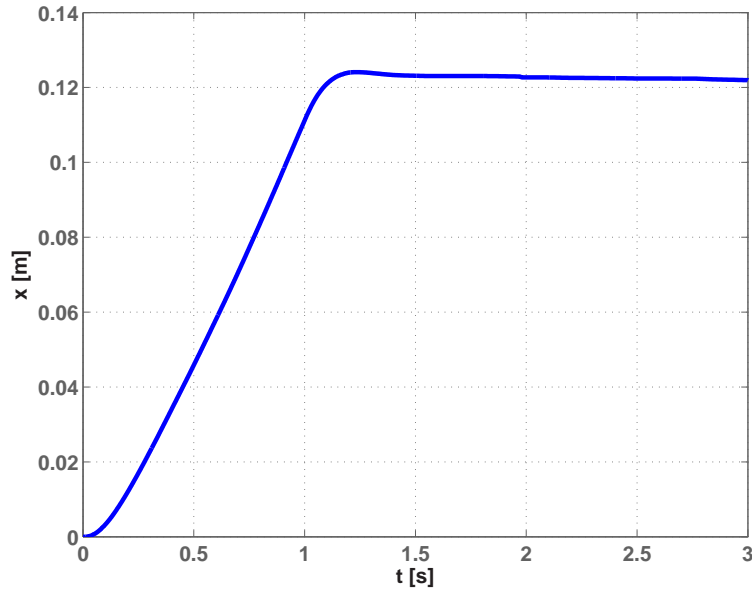
V modelu inverzního kyvadlo se nachází jak konstanty, které je možno jednoduše zjistit (změřit, najít v tabulkách) tak i konstanty, které nelze jednoduše zjistit (například koeficient tření motoru). K jejich určení využijeme naměřené přechodové charakteristiky. Přechodová charakteristika je odezva systému na vstupní jednotkový skok (ROUBAL, J. et al., 2011).

K určení přechodové charakteristiky reálného systému inverzního kyvadla tento skok použít nelze, protože vozík by narazil na koncový doraz. K určení přechodové charakteristiky byl tedy použit skok z obr. 2.15(a). Hodnota napětí se pohybuje ve středu lineární části statické převodní charakteristiky motoru, viz obr. 2.12. Na obr. 2.15(b) je zobrazena odezva reálného systému na skok vstupního napětí.



Obrázek 2.15: Odezva systému na vstupní skok

Tuto odezvu je nutno přepočítat tak, aby jej bylo možno identifikovat jako odezvu na jednotkový skok. Je tedy nutné dělit hodnoty na svislé ose hodnotou napětí přivedeného na vstup systému, to je hodnotou 4. Tato přepočítaná charakteristika je na následujícím obrázku.



Obrázek 2.16: Naměřená přechodová charakteristika motoru s vozíkem

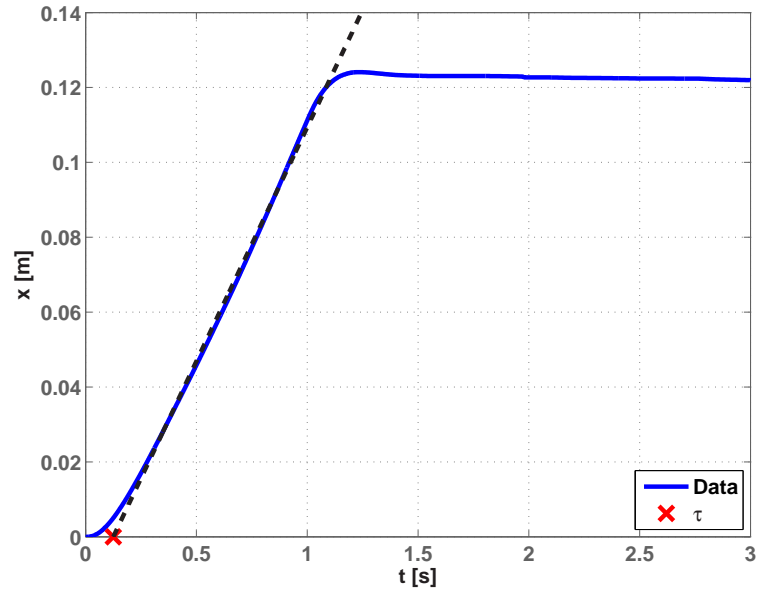
Z obr. 2.16 je patrné, že se jedná o astatický systém druhého řádu (ROUBAL, J. et al., 2011), kterému odpovídá přenos

$$P(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)},$$

kde  $k$  je směrnice asymptoty k lineární části přechodové charakteristiky,  $\tau$  je časová konstanta, kterou odečteme jako průsečík asymptoty s vodorovnou časovou osou, viz následující obrázek. Odtud  $k = 0,1250$  a  $\tau = 0,125$  s a hledaný přenos mezi napětím motoru a polohou vozíku tedy je

$$P_{\text{ux}}(s) = \frac{0,1250}{s(0,125s + 1)}. \quad (2.6)$$



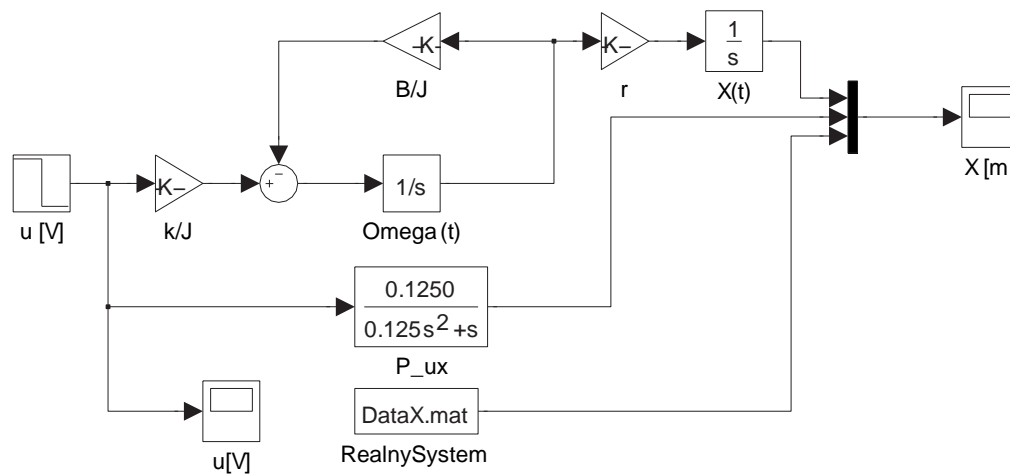


Obrázek 2.17: Přechodová charakteristika motoru s vozíkem – určení přenosových konstant

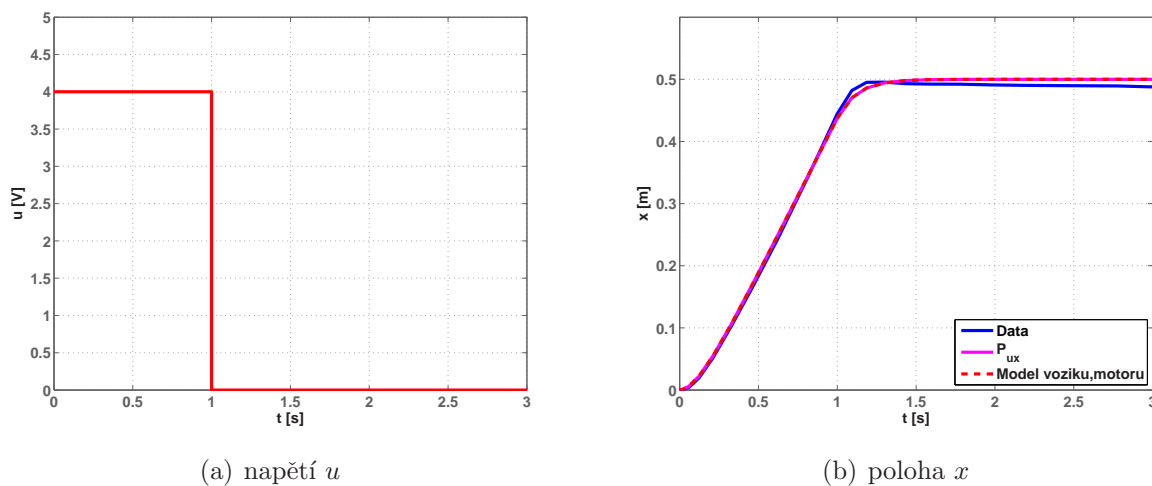
Nyní budou z identifikovaného přenosu (2.6) přeneseny konstanty do stavového modelu na obr. 2.6. Poloměr ozubeného kola  $r$  byl použit z tab. 2.3. Konstanta  $B$  byla zvolena  $1 \text{ kg m}^2 \text{ V}^{-1}$  a dále byly dopočítány konstanty  $J = 0,125 \text{ kg m}^2$  a  $k = 9,6154 \text{ kg m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-2}$  podle vztahu

$$k = \frac{0,1250}{0,1516 \cdot 0,013},$$

kde  $r = 0,013 \text{ m}$  a  $0,1516$  je konstanta ze statické převodní charakteristiky motoru s vozíkem. Simulinkové schéma pro srovnání odezvy systému, přenosu (2.6) a stavového modelu z obr. 2.6 a naměřené průběhy jsou na následujících obrázcích.



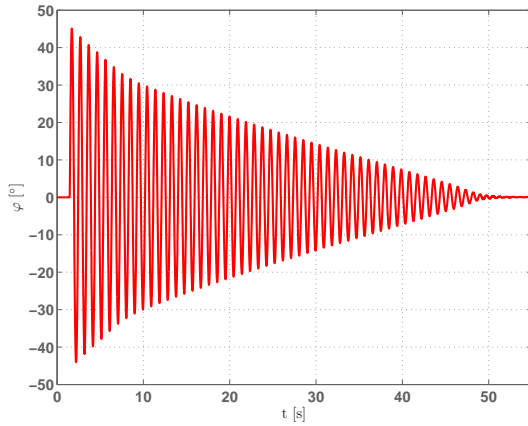
Obrázek 2.18: Ověření identifikace motoru s vozíkem – simulinkové schéma

(a) napětí  $u$ (b) poloha  $x$ 

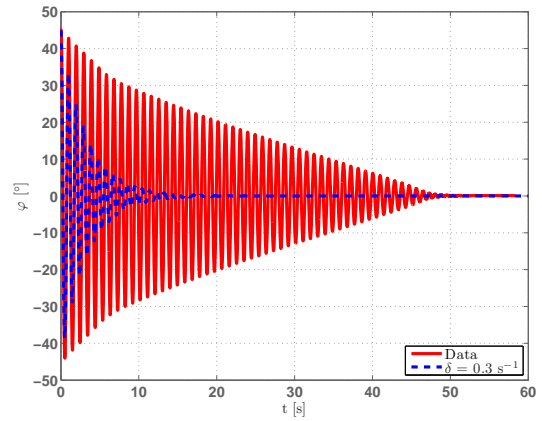
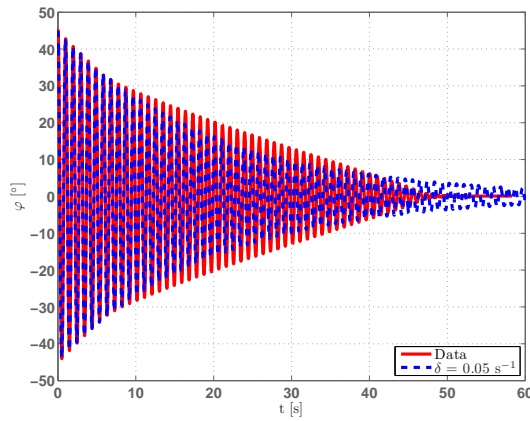
Obrázek 2.19: Ověření identifikace motoru s vozíkem – odezva systému

### 2.4.3 Identifikace konstant kyvadla

Zbývá určit koeficient tlumení kyvadla  $\delta$ . Tento koeficient byl určen experimentálně. Po spuštění měření bylo rameno kyvadla ručně vychýleno. Vstupní napětí bylo po celou dobu měření rovno 0. Byl změřen průběh ustálení ramena kyvadla. Tento průběh je zobrazen na (obr. 2.20(a)). Koeficient tlumení kyvadla u modelu byl postupně snižován dokud nebyla nalezena optimální hodnota. Postupné snižování  $\delta$  je zobrazeno na následujícím obrázku.



(a) naměřené hodnoty

(b)  $\delta = 0,3 \text{ s}^{-1}$ (c)  $\delta = 0,05 \text{ s}^{-1}$ 

Obrázek 2.20: Odezva kyvadla při nehybném vozíku

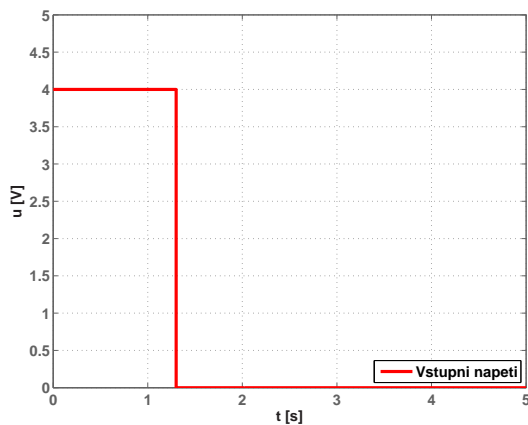
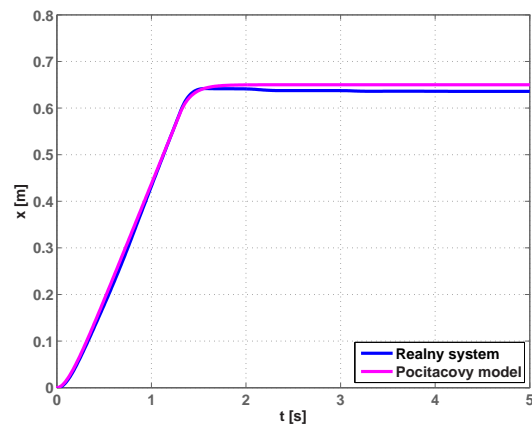
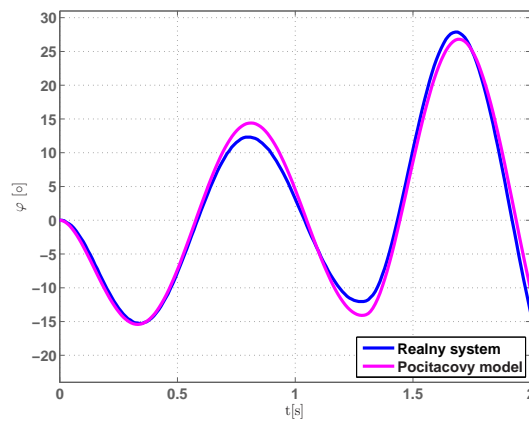
Následující tabulka shrnuje identifikované konstanty modelu inverzního kyvadla.

Tabulka 2.5: Parametry modelu inverzního kyvadla

Konstanta	Označení	Hodnota	Jednotka
Koeficient tření motoru	$B$	1	$\text{kg m}^2 \text{V}^{-1}$
Moment setrvačnosti motoru a vozíku	$J$	0,125	$\text{kg m}^2$
Konstanta motoru	$k$	9,6154	$\text{kg m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-2}$
Poloměr ozubeného kola motoru	$r$	0,013	m
Délka ramena kyvadla	$l$	0,33	m
Koeficient útlumu kyvadla	$\delta$	0,05	$\text{s}^{-1}$
Tíhové zrychlení	$g$	9,81	$\text{ms}^{-2}$

## 2.5 Verifikace modelu

Verifikace modelu slouží k ověření správnosti dosavadní práce. Do masky modelu byly vloženy hodnoty jednotlivých konstant z tab. 2.5 a byla porovnávána odezva modelu s odezvou reálného systému. Na následujícím obrázku je zobrazena odezva systému na skokovou změnu vstupního napětí. Počítačový model už poměrně přesně nahrazuje reálný systém.

(a) napětí na motoru  $u$ (b) poloha vozíku  $x$ (c) úhel natočení ramena kyvadla  $\varphi$ 

Obrázek 2.21: Odezva systému a simulinkového modelu na vstupní skokový signál

Nyní je nutno vytvořený počítačový model upravit tak, aby jej bylo možno použít pro návrh PID regulátorů. Bude provedena linearizace modelu a tím vytvořeny přenosy ze vstupního napětí na polohu vozíku a úhel vychýlení kyvadla.

# Kapitola 3

## Linearizace

Reálné fyzikální modely můžeme popsat pomocí diferenciálních rovnic, které mohou být jak lineární tak i nelineární. Nelineární rovnice popisují reálný systém ve velkém rozsahu pracovních podmínek. Regulované systémy ale často pracují v úzkém okolí zvoleného pracovního bodu, je proto vhodné nahradit nelineární model modelem lineárním. Tento proces se nazývá linearizace.

### 3.1 Stavový model systému

Každý lineární model lze zapsat pomocí stavových matic ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

kde  $\mathbf{u}$  je vektor vstupů,  $\mathbf{x}$  je vektor vnitřních stavů,  $\mathbf{y}$  je vektor výstupů a  $\mathbf{x}_0$  je počáteční podmínka.

Nejprve byla provedena volba vektoru vstupů – vstupem modelu je pouze napětí.

$$[u_1] = [u]$$

Poté byl zvolen vektor vnitřních stavů, který se skládá z veličin v derivacích.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ x \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Nakonec byl vybrán vektor výstupů.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{180}{\pi} \varphi \\ x \end{bmatrix}$$

Vstupy původních diferenciálních rovnic (2.3) byly nahrazeny prvky vektoru vstupů. Veličiny v derivacích byly nahrazeny prvky vektoru vnitřních stavů.

$$\dot{x}_1 = -\frac{B}{J} x_1(t) + \frac{k}{J} u_1(t)$$

$$\dot{x}_2 = r \cdot x_1(t)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -2\delta x_4(t) - \frac{3g}{2l} \sin x_3(t) - \frac{3}{2l} r \left( -\frac{B}{J} x_1(t) + \frac{k}{J} u_1(t) \right) \cos x_3(t)$$

Výstupy byli vyjádřeny pomocí konstant, prvků vektorů vstupů a vnitřních stavů.

$$y_1 = \frac{180}{\pi} x_3$$

$$y_2 = x_2$$

Model inverzního kyvadla je nelineární, je tedy nutno model linearizovat a poté určit stavové matice  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ .

## 3.2 Určení pracovního bodu

Linearizace je prováděna vždy v pracovním bodě, pro který platí, že všechny derivace vnitřních stavů jsou rovny nule, všechny veličiny jsou v ustáleném stavu. Za derivaci byla dosazena nula a proměnné byly označeny indexem nula.

$$0 = -\frac{B}{J} x_{10} + \frac{k}{J} u_{10}$$

$$0 = r \cdot x_{10}$$

$$0 = -2\delta x_{40} - \frac{3g}{2l} \sin x_{30} - \frac{3}{2l} r \left( -\frac{B}{J} x_{10} + \frac{k}{J} u_{10} \right) \cos x_{30}$$

$$0 = x_4$$

Stejně tak i u výstupů.

$$y_{10} = \frac{180}{\pi} x_{30}$$

$$y_{20} = x_{20}$$

Bylo určeno jaké hodnoty musejí jednotlivé proměnné mít, aby se systém nacházel v pracovním bodě.

$$x_{10} = 0, u_{10} = 0, x_{20} \in R$$

U  $x_{30}$  byli dvě možnosti – sinus se rovná 0 pokud je argument roven 0 nebo  $\pi$  - rameno kyvadla se nachází svisle k zemi.

$$0 = -\frac{3g}{2l} \sin x_{30}$$

$$0 = \sin x_{30} \rightarrow x_{30} = 0 \text{ nebo } x_{30} = \pi$$

$$y_{20} \in R$$

$$y_{10} = 0 \text{ nebo } y_{10} = \pi$$

### 3.3 Linearizace pomocí Taylorova polynomu 1. stupně

Jednotlivé rovnice byly postupně linearizovány pomocí Taylorova polynomu, před proměnné v lineárních rovnicích bylo připsáno  $\Delta$  pro označení odchylkového modelu.

$$\dot{x}_1 \approx -\frac{B}{J} \Delta x_1(t) + \frac{k}{J} \Delta u_1(t)$$

$$\dot{x}_2 \approx r \cdot x_1 \Delta(t)$$

$$\dot{x}_3 \approx \Delta x_4$$

$$\Delta y_1 = \frac{180}{\pi} \Delta x_3(t)$$

$$\Delta y_2 = \Delta x_2$$

Rovnice kyvadla je nelineární, byla postupně derivována podle jednotlivých proměnných.

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 \approx & -\frac{3}{2l} r \left( -\frac{B}{J} \right) \cos x_{30} \Delta x_1(t) \\ & + \left[ -\frac{3g}{2l} \cos x_{30}(t) - \frac{3}{2l} r \left( -\frac{B}{J} x_{10}(t) + \frac{k}{J} u_{10}(t) \right) \sin x_{30}(t) \right] \Delta x_3(t) \\ & - 2\delta \Delta x_4(t) - \frac{3}{2l} r \frac{k}{J} \cos x_{30} \Delta u_1(t) \end{aligned}$$

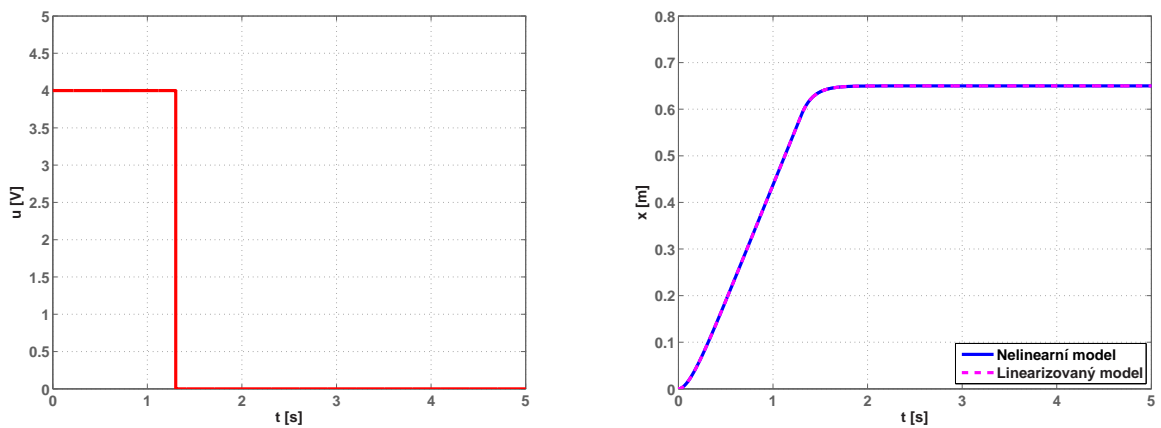
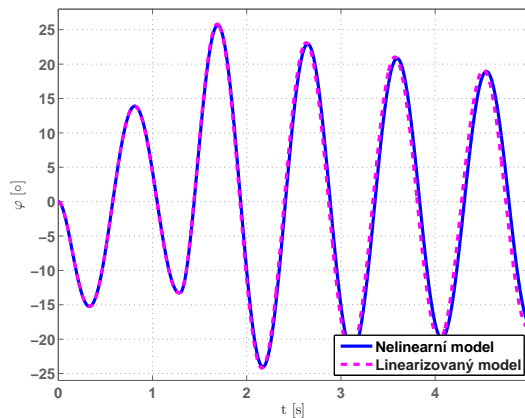
Poté byly jednotlivé konstanty a proměnné přepsány do stavových matic.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3r}{2l} \frac{B}{J} \cos x_{30} & 0 & -\frac{3g}{2l} \cos x_{30} & -2\delta \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{k}{J} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{3r}{2l} \frac{k}{J} \cos x_{30} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{180}{\pi} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



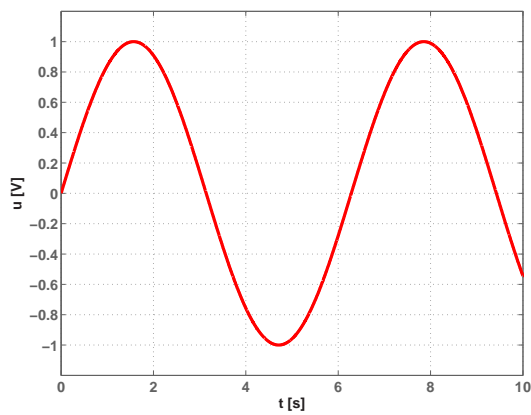
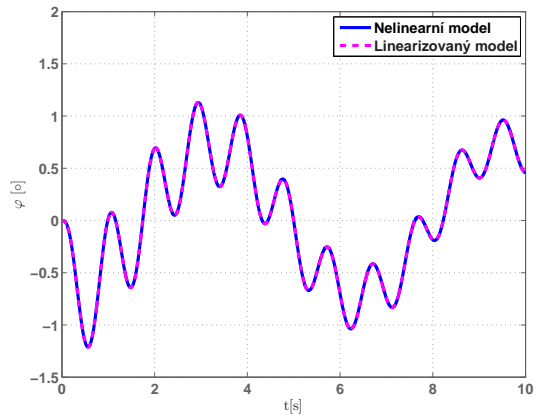
Tyto matice byly přepsány do Matlabu a pomocí funkce `SS` a bločku `LTI` přeneseny do Simulinku. Na následujícím obrázku je zobrazena odezva nelineárního a linearizovaného modelu na skokovou změnu vstupního napětí. Vzhledem k tomu, že v modelu je nelineární pouze rovnice samotného kyvadla, musí se grafy průběhu polohy vozíku překrývat. Průběh odezvy ramena linearizovaného modelu se lehce liší od modelu nelineárního.

(a) napětí na motoru  $u$ (b) poloha vozíku  $x$ 

(c) úhel natočení ramena kyvadla

Obrázek 3.1: Odezva nelineárního a linearizovaného modelu na vstupní skokový signál

Odezva linearizovaného modelu byla otestována i na složitějším signálu. Vstupní signál a úhel natočení ramena kyvadla je zobrazen na následujícím obrázku.

(a) napětí na motoru  $u$ 

(b) úhel natočení ramena kyvadla

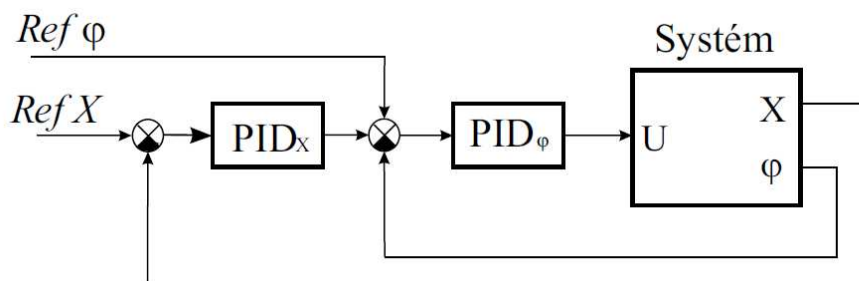
Obrázek 3.2: Odezva linearizovaného modelu na vstupní sinusový signál

Průběhy natočení ramena kyvadla linearizovaného a nelinearizovaného modelu inverzního kyvadla se začínají viditelně rozcházet až kolem času  $t = 8$  s, lineární model kyvadla tedy poměrně přesně nahrazuje původní nelineární systém.

# Kapitola 4

## Regulace pomocí PID regulátoru

Tato kapitola se zabývá návrhem regulátorů pro přemístování vozíku s kyvadlem v dolní a v horní poloze. Při návrhu regulátorů byl použit linearizovaný model s ramenem kyvadla v dolní poloze  $\varphi = 0^\circ$  respektive linearizovaný model s ramenem kyvadla v horní poloze  $\varphi = 180^\circ$ . K návrhu regulátoru bylo využito geometrického místa kořenů. Struktura regulačního obvodu je na následujícím obrázku, který byl převzat z (ROUBAL, J., 2012).



Obrázek 4.1: Struktura regulačního obvodu

Prioritou regulace je udržet rameno kyvadla v dolní nebo horní poloze, proto je ve vnitřní smyčce regulátor výchylky  $\varphi$ . Regulátor polohy  $x$  je ve smyčce vnější, protože regulace polohy je druhořadý problém.

## 4.1 Regulátor výchylky $\varphi$ pro rameno kyvadla v dolní poloze

Při návrhu regulátoru výchylky  $\varphi$  bylo využito linearizovaného modelu pro dolní polohu a přenosu  $G_{\varphi_D}(s)$  mezi vstupním napětím  $u$  a vychýlkou ramene kyvadla  $\varphi$  jehož nuly a póly jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 4.1: Nuly a póly přenosu pro kyvadlo v dolní poloze  $G_{\varphi_D}(s)$

Nuly	Póly
$-1,2768 \cdot 10^{-15}$	$-8,000$
-	$-0,1000 \pm j6,769$

Rameno kyvadla je v dolní poloze stabilní, tomu odpovídají záporné reálné hodnoty polů. K návrhu regulátoru byla využita metoda geometrického místa kořenů (ROUBAL, J. et al., 2011). Regulátor byl navržen pomocí matlabové funkce `Sisotool` se vstupním parametrem  $G_{\varphi_D}(s)$ . Výsledkem návrhu je PD regulátor se zpožděním 1. řádu

$$R_{\varphi_D}(s) = \frac{0,5486s + 3,555}{s + 10,97}. \quad (4.1)$$

Uzavřená regulační smyčka je stabilní a její póly a nuly jsou zobrazeny v následující tabulce.

Tabulka 4.2: Nuly a póly uzavřené vnitřní regulační smyčky pro kyvadlo v dolní poloze

Nuly	Póly
$-0,100 \pm j6,769$	$-4,8088 \pm j11,8339$
$-8,000$	$-4,7762 \pm j1,0823$
$-6,4801$	-

## 4.2 Regulátor výchylky $x$ pro rameno kyvadla v dolní poloze

K návrhu regulátoru polohy vozíku nelze použít přenos  $G_{x_D}(s)$ , ale přenos upravený přenosem vnitřní regulační smyčky, který je označen  $G_{\bar{x}_D}(s)$ . Tento přenos byl získán pomocí matlabových funkcí `series` a `feedback`. Výsledkem návrhu je opět PD regulátor se zpožděním 1. řádu

$$R_{x_D}(s) = \frac{45,14s + 193,3}{s + 4,009}. \quad (4.2)$$

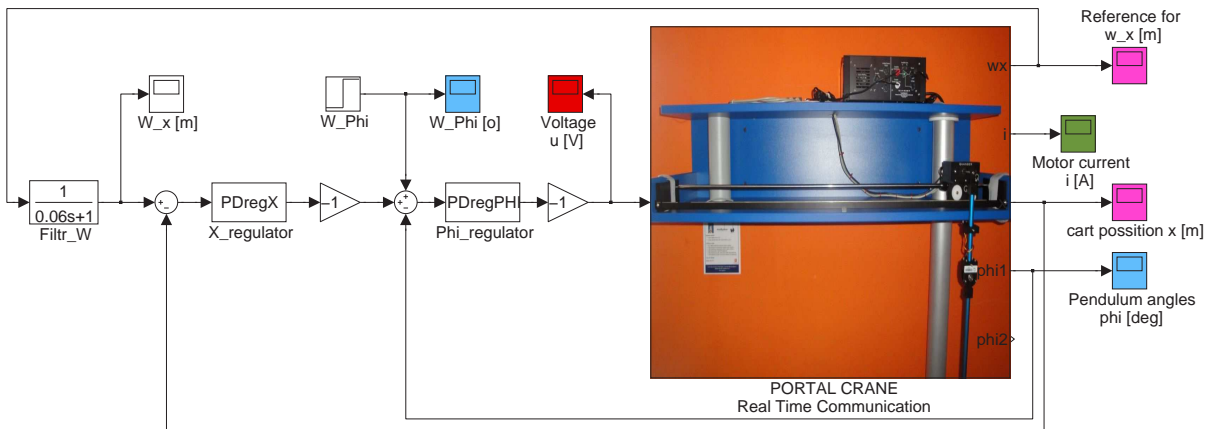
Kompletní regulační smyčka z obr. 4.1 je stabilní a její póly, nuly jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 4.3: Nuly a póly kompletní regulační smyčky pro kyvadlo v dolní poloze

Nuly	Póly
$-4,8088 \pm j11,8339$	$-5,1415 \pm j12,6936$
$-4,7762 \pm j1,0823$	$-5,5602$
$-4,2822$	$-4,3731$
-	$-1,4814 \pm j2,1270$

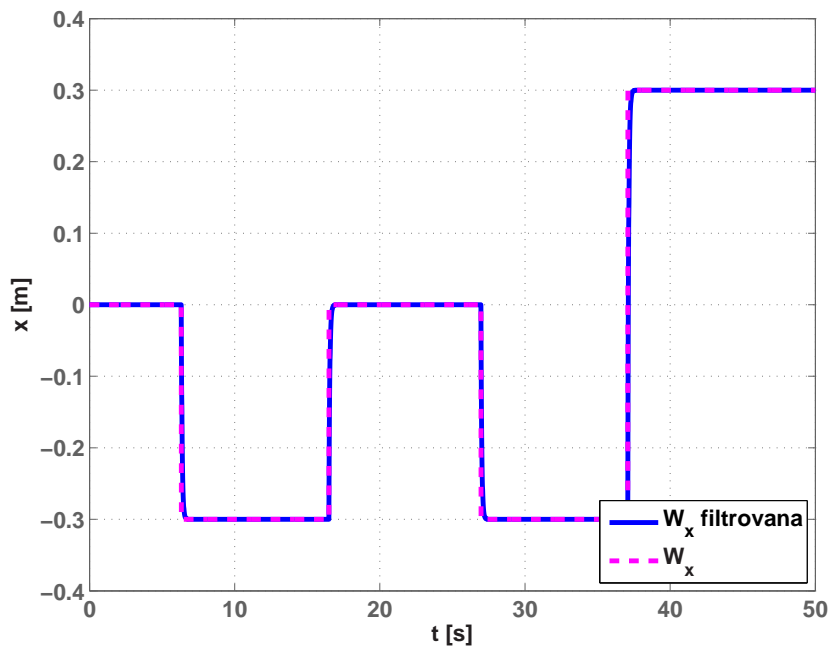
## 4.3 Regulace v dolní poloze – aplikace na reálný systém

Po otestování správné funkce regulátorů na lineárním a později nelineárním modelu bylo přistoupeno k aplikaci regulátorů na systém inverzního kyvadla. Simulinkové schéma regulačního odvodu je zobrazeno na následujícím obrázku.



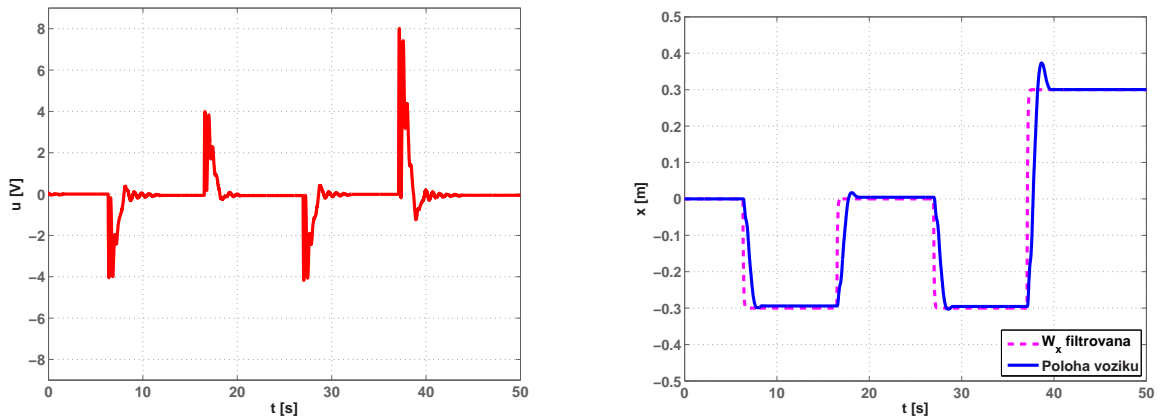
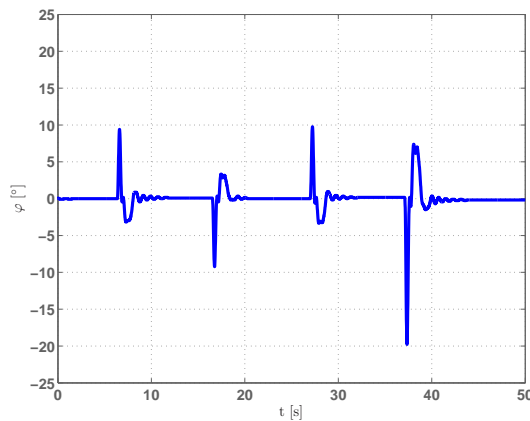
Obrázek 4.2: Simulinkové schéma regulačního odvodu pro rameno kyvadla v dolní poloze

Bloček *Filtr\_W* slouží k filtraci žádané hodnoty pro regulátor polohy vozíku. Vliv tohoto filtru je na následujícím obrázku.



Obrázek 4.3: Filtrace  $W_x$

Tento filtr snižuje skok akční veličiny a tím i překmit regulované veličiny. Pomocí tohoto bločku byl odstraněn problém s překročením maximální dráhy vozíku při změně žádané hodnoty o 0,6 m. Průběhy jednotlivých signálů při regulaci jsou zobrazeny na následujícím obrázku.

(a) vstupní napětí  $u$ (b) poloha vozíku  $x$ 

(c) úhel natočení ramena kyvadla

Obrázek 4.4: Regulace v dolní poloze

Z jednotlivých průběhů vyplývá, že kvalita regulace výchylky úhlu  $\varphi$  je dostačující, výchylka ramene kyvadla je maximální ( $20^\circ$ ) při přejezdu vozíku přes celou dráhu. Řídící veličina se pohybuje v rozmezí maximálního vstupního napětí, přesněji v rozmezí  $\pm 8$  V.

Regulace polohy je velmi dobrá, regulátor je schopný přesně sledovat žádanou veličinu. Přejezd vozíku by bylo možné snížit zvýšením konstanty v bločku `Filtr_W`, avšak za cenu snížení rychlosti regulace polohy.

## 4.4 Regulátor výchytky $\varphi$ pro rameno kyvadla v horní poloze

Při návrhu regulátoru výchytky  $\varphi$  bylo využito linearizovaného modelu pro horní polohu a přenosu  $G_{\varphi_H}(s)$  mezi vstupním napětím  $u$  a výchytkou ramene kyvadla  $\varphi$  jehož nuly a póly jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 4.4: Nuly a póly přenosu pro kyvadlo v horní poloze  $G_{\varphi_H}(s)$

Nuly	Póly
$-4,0246 \cdot 10^{-16}$	6,5784
-	-6,7784
-	-8,000

Systém s ramenem kyvadla v horní poloze je nestabilní, tomu odpovídá jeden kladný pól. K návrhu regulátoru bylo opět využito geometrického místa kořenů. Výsledkem návrhu je PD regulátor se zpožděním 1. řádu.

$$R_{\varphi_H}(s) = \frac{-0,442s - 1,95}{s - 0,9664}. \quad (4.3)$$

Uzavřená regulační smyčka je stabilní a její póly a nuly jsou zobrazeny v následující tabulce.

Tabulka 4.5: Nuly a póly uzavřené vnitřní regulační smyčky pro kyvadlo v horní poloze

Nuly	Póly
6,5784	0
$-6,7784 \pm j6,769$	$-1,7001 \pm j6,3473$
-4,4118	$-1,9167 \pm j2,0761$



## 4.5 PD regulátor výchyly $x$ pro rameno kyvadla v horní poloze

K návrhu regulátoru polohy vozíku byl použit přenos upravený přenosem vnitřní regulační smyčky, který je označen  $G_{\bar{x}_H}(s)$ . Tento přenos byl získán pomocí matlabových funkcí `series` a `feedback`. Výsledkem návrhu je opět PD regulátor se zpožděním 1. řádu.

$$R_{x_H PD}(s) = \frac{2,967s + 24,72}{s + 6,4}. \quad (4.4)$$

Kompletní regulační smyčka z obr. 4.1 je stabilní a její póly, nuly jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 4.6: Nuly a póly kompletní regulační smyčky pro kyvadlo v horní poloze s PD regulátorem

Nuly	Póly
0	$-1,8797 \pm j6,0853$
$-8,3316$	$-6,4025$
$-1,7001 \pm j6,3473$	$-1,2808$
$-1,9167 \pm j6,0853$	$-1,0954 \pm j2,2939$

## 4.6 PID regulátor výchyly $x$ pro rameno kyvadla v horní poloze

Testováním správné funkce regulátorů bylo zjištěno, že PD regulátor není vhodný pro regulaci polohy vozíku s ramenem v horní poloze. Regulátor není schopný regulovat z nulovou střední hodnotou regulační odchylky. Proto byl pro regulaci polohy vozíku navržen PID regulátor. K návrhu regulátoru bylo opět použito geometrické místo kořenů.

$$R_{x_H PID}(s) = \frac{4,313s^2 + 54,36s + 35,85}{s^2 + 14,98s}. \quad (4.5)$$

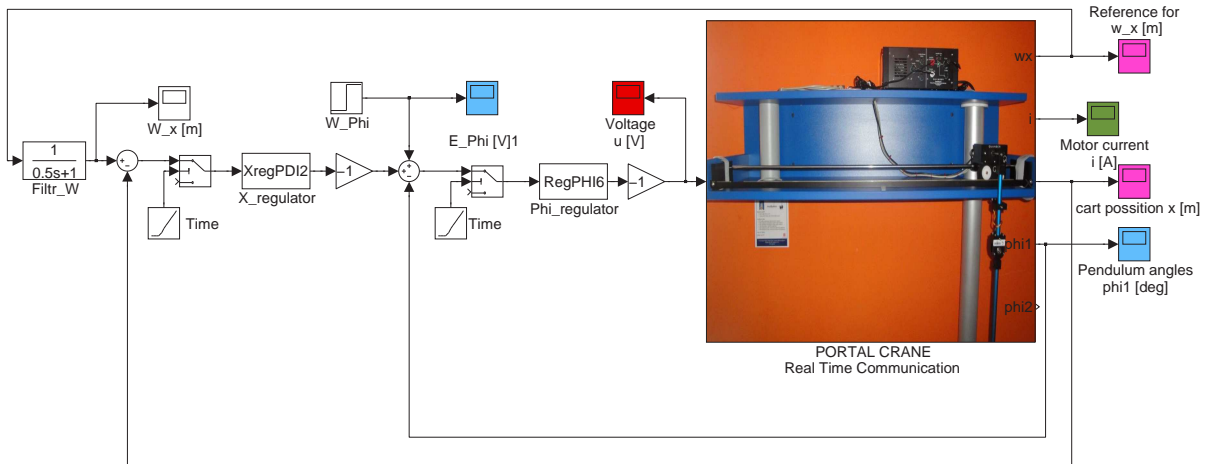
Kompletní regulační smyčka z obr. 4.1 s PID regulátorem je stabilní a její póly, nuly jsou uvedeny v následující tabulce.

Tabulka 4.7: Nuly a póly kompletní regulační smyčky pro kyvadlo v horní poloze s PID regulátorem

Nuly	Póly
0	-14,9985
-11,9056	$-1,8066 \pm j6,0571$
$-1,7001 \pm j6,3473$	$-1,2795 \pm j2,0790$
$-1,9167 \pm j6,0853$	$-0,5015 \pm j0,7873$

## 4.7 Regulace v horní poloze – aplikace na reálný systém

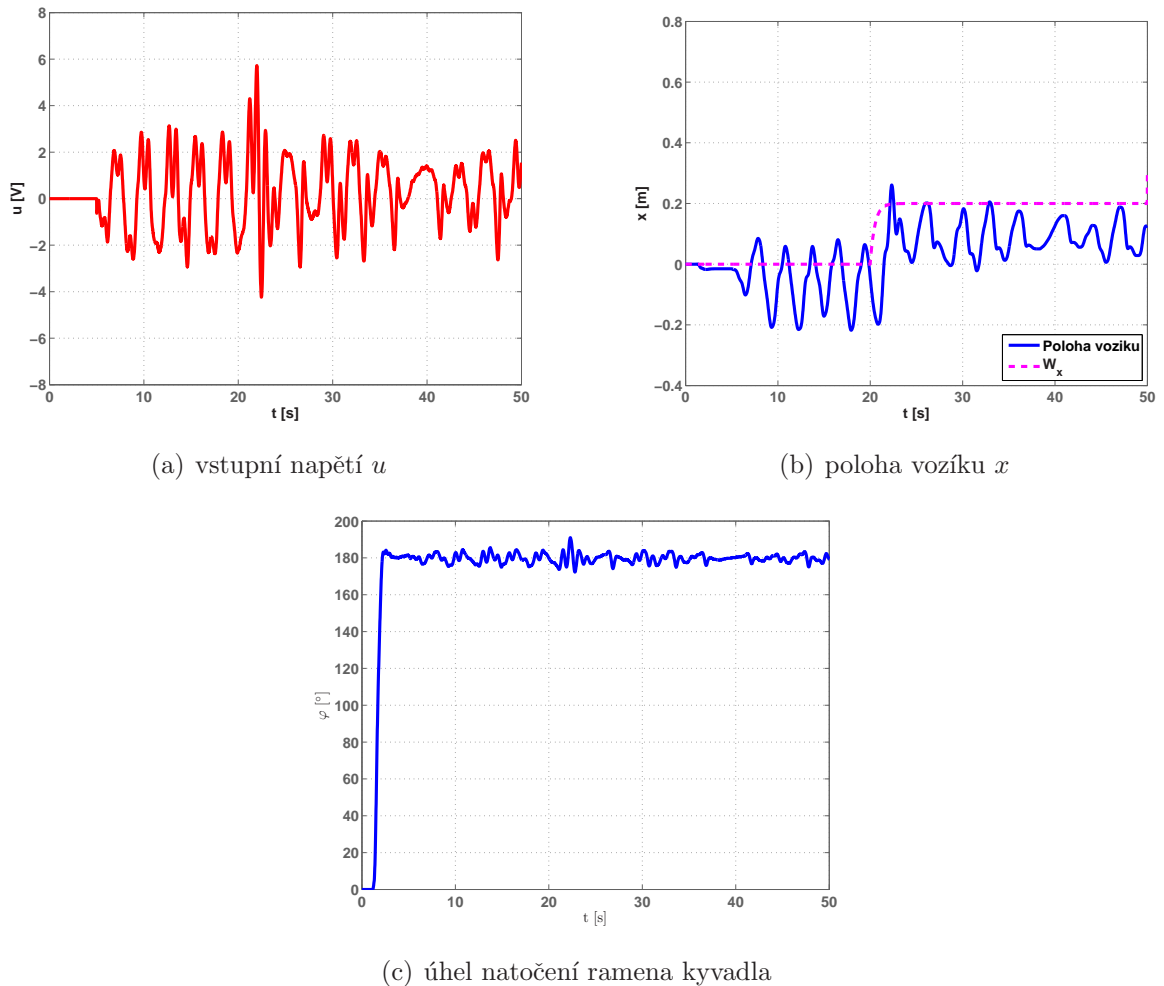
Stejně jako u regulace v dolní poloze byla správná funkce regulátorů ověřena na lineárním a později nelineárním modelu. Simulinkové schéma regulačního odvodu pro regulaci v horní poloze je zobrazeno na následujícím obrázku.



Obrázek 4.5: Simulinkové schéma regulačního odvodu pro rameno kyvadla v horní poloze

Bločky **Switch** a **Time** ve vnitřní regulační smyčce zpožďují připojení regulátoru vychylky  $\varphi$ . Regulátor polohy vozíku  $x$  je připojen o 0,5 s později než regulátor úhlu, tedy až po odeznění přechodových dějů. Opět je použit bloček **Filtr\_W** pro filtraci žádané polohy

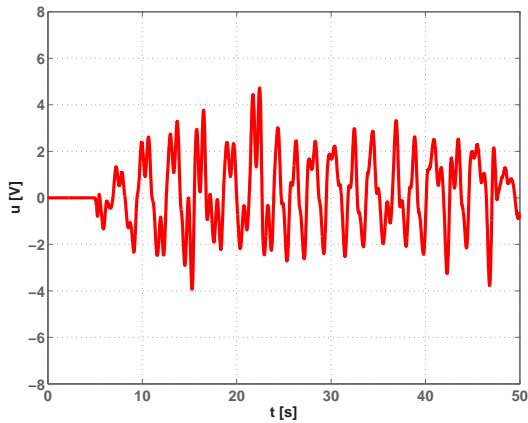
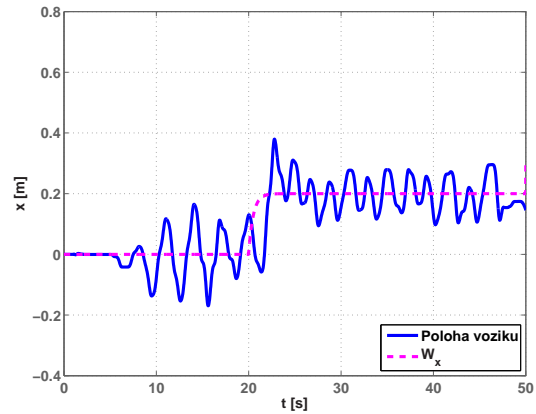
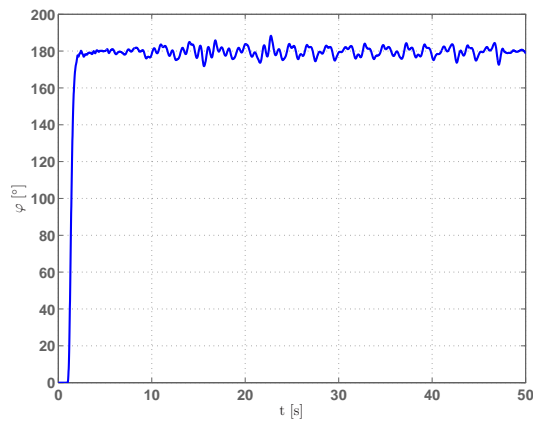
vozíku. Průběhy jednotlivých signálů pro regulaci polohy vozíku pomocí PD regulátoru (4.5) jsou zobrazeny následujícím obrázkem.



Obrázek 4.6: Regulace v horní poloze pomocí PD regulátoru

Kvalita regulace výchylky  $\varphi$  je velmi dobrá, rameno se pohybuje v rozmezí  $180^\circ \pm 10^\circ$ . Řídící veličina se bezpečně pohybuje v rozmezí maximálního vstupního napětí systému. Systém není vybudován velkými akčními zásahy, to má dobrý vliv na kvalitu regulace.

Kvalita regulace polohy vozíku je horší, regulátor není schopen regulovat s nulovou střední hodnotou regulační odchylky. Podle (ROUBAL, J., 2002) by tento nedostatek mohla odstranit integrační složka v regulátoru polohy vozíku. Proto byl pro regulaci polohy navržen PID regulátor (4.6). Průběhy jednotlivých signálů pro regulaci polohy vozíku pomocí PID regulátoru jsou zobrazeny na následujícím obrázku.

(a) vstupní napětí  $u$ (b) poloha vozíku  $x$ 

(c) úhel natočení ramena kyvadla

Obrázek 4.7: Regulace v horní poloze pomocí PID regulátoru

Kvalita regulace výchylky  $\varphi$  je opět velmi dobrá, protože používáme stejný regulátor výchylky  $\varphi$  jako v předchozím případě. Řídící veličina se bezpečně pohybuje v rozmezí maximálního vstupního napětí systému.

Kvalita regulace polohy vozíku pomocí PID regulátoru je podstatně lepší než při použití PD regulátoru, regulátor je schopen regulovat s nulovou střední hodnotou regulační odchylky. Poloha vozíku se pohybuje v okolí žádané polohy v rozmezí  $\pm 18$  cm. Tato vlastnost je způsobena integrační složkou PID regulátoru.

# Kapitola 5

## Závěr

V absolventské práci byly splněny všechny požadavky zadání. Z matematicko-fyzikálních diferenciálních rovnic byl nejprve vytvořen v programovém prostředí MATLAB/Simulink počítačový model inverzního kyvadla včetně virtuální scény. Tento kompletní model je na příloženém DVD. Byla provedena identifikace systému, kde byly určeny neznámé konstanty systému. V rámci identifikace bylo ověřeno, že počítačový model odpovídá reálnému systému. Následně byl model linearizován, aby mohl být použit pro návrh regulátorů.

Veškeré regulátory v této práci byly navrženy pomocí geometrického místa kořenů, které je blíže popsáno v (ROUBAL, J. et al., 2011). Při návrhu regulátorů bylo vycházeno z linearizovaného modelu s ramenem kyvadla v dolní poloze  $\varphi = 0^\circ$  respektive z linearizovaného modelu s ramenem kyvadla v horní poloze  $\varphi = 180^\circ$ . Regulátor výchylky  $\varphi$  je umístěn ve vnitřní regulační smyčce protože regulace úhlu je prioritní. Regulátor polohy  $x$  je ve smyčce vnější, protože regulace polohy je druhořadý problém.

Na začátku kapitoly číslo 4 je popsán návrh regulátorů pro řízení úhlu a polohy vozíku s ramenem kyvadla v horní poloze. K regulaci úhlu i polohy byly použity PD regulátory se zpožděním 1. řádu. Při aplikaci regulátoru polohy na reálný systém bylo nutno vyřešit problém s vyjžděním vozíku z dráhy při přejezdu přes celou dráhu. Byl vytvořen filtr pomocí bločku `TransferFunction`, který snižuje skok akční veličiny a tím snižuje překmit regulované veličiny.

Druhá část kapitoly 4 se zabývá návrhem a aplikací regulátorů na reálný systém. Výchylka úhlu  $\varphi$  je regulována PD regulátorem se zpožděním 1. řádu. Kvalita regulace úhlu je velmi dobrá, rameno kyvadla se pohybuje v rozmezí  $180^\circ \pm 10^\circ$ . Použití PD regulátoru pro regulaci polohy s ramenem v horní poloze pomocí PD regulátoru není vhodné. Regulátor polohy není schopen sledovat, s nulovou střední hodnotou regulační

odchyly, žádanou hodnotu. Tento nedostatek by mohla odstranit integrační složka v regulátoru polohy. Proto byl navržen PID regulátor polohy, který integrační složku obsahuje. To způsobí, že střední hodnota polohy vozíku sleduje žádanou hodnotu. Vozík se pohybuje v okolí žádané hodnoty signálu v rozmezí  $\pm 18\text{cm}$ . Oba regulátory pro dolní i horní polohu jsou na přiloženém DVD.

Pro systém inverzního kyvadla byla snaha navrhnout regulátor, který je schopen přemístit rameno kyvadla z dolní polohy do horní. Byl vytvořen algoritmus pro vyšvihnutí ramene do horní polohy. Přepnutí mezi tímto algoritmem a lineární PD regulací se děje pouze v závislosti na výchylce ramene  $\varphi$ . Tento způsob není vhodný, protože parametry motoru se v závislosti na teplotě mění. Může tedy dojít k tomu, že rameno kyvadla má v momentě přepnutí příliš velkou úhlovou rychlost a PD regulátor systém v horní poloze neustabilizuje. K vyřešení tohoto problému by bylo nutné k regulaci systému použít stavový regulátor, který je schopen odhadovat úhlovou rychlost  $\omega$  ramene kyvadla. Regulace pomocí stavového regulátoru je popsána v (ROUBAL, J., 2002).

# Literatura

- ROUBAL, J. (2002), Nelineární regulace kyvadla, (Diplomová práce), ČVUT v Praze, FEL, Praha.
- ROUBAL, J. (2012), Výukové materiály pro Laboratoř aplikované informatiky na VOŠ, (Bakalářská práce), ČVUT v Praze, MUVS, Praha.
- ROUBAL, J., HUŠEK, P. a KOL. (2011), *Regulační technika v příkladech*, Praha: BEN – technická literatura. ISBN 978-80-7300-260-2.
- ŠIKÝŘ, T. (2011), Systém vodního hospodářství – laboratorní model, (Absolventská práce), VOŠ, SŠ, COP Sezimovo Ústí, Sezimovo Ústí.





# Příloha A

## Obsah přiloženého CD/DVD

K této práci je přiloženo CD/DVD s následující adresářovou strukturou.

- Absolventská práce v  $\text{\LaTeX}$ 2 $\epsilon$  – Absolventská práce ve formátu  $\text{\LaTeX}$ 2 $\epsilon$ .
- Matlab: Zdrojové kódy z Matlabu a Simulinková schémata.
  - 2.1 Vstupy a výstupy
  - 2.2 Tvorba modelu
  - 2.3 Overeni modelu
  - 2.4.1 Statická převodní charakteristika
  - 2.4.2 Identifikace vozíku
  - 2.4.3 Identifikace kyvadla
  - 2.5 Verifikace modelu
  - 3.1 Linearizace
  - 4.1 Návrh regulátoru pro dolní polohu
  - 4.2 Návrh regulátoru pro horní polohu
  - Model
- Virtuální model: Virutální model vytvořený v programu Virtual Real Builder.
- Vacek AP\_2014.pdf – absolventská práce ve formátu PDF



# Příloha B

## Použitý software

**L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X** [⟨http://www.miktex.org/⟩](http://www.miktex.org/)

**Matlab/Simulink R2006b** [⟨http://www.mathworks.com⟩](http://www.mathworks.com)

**WinEdt 6.0** [⟨http://www.winedt.com/⟩](http://www.winedt.com/)

Software z výše uvedeného seznamu je buď volně dostupný, nebo je toho času jeho vlastníkem Vyšší odborná škola, Střední škola, Centrum odborné přípravy, Sezimovo Ústí, Budějovická 421, kde autor téhož času studoval a vytvořil tuto absolventskou práci.



# Příloha C

## Časový plán absolventské práce

Činnost	Časová náročnost	Termín ukončení	Splněno
Identifikace systému	1 měsíc	04.11.2012	
Vyšvihnutí ramena do horní polohy	1 týden	20.04.2013	
Linearizace	3 týdny	21.05.2013	
Zpracování Mfiles	2 týdny	25.10.2013	
Vytvořit předběžný obsah práce	3 dny	19.11.2013	
Zpracování podkapitoly Identifikace systému	1 dny	22.11.2013	
Statická převodní charakteristika snímačů	4 dny	27.11.2013	
Tvorba virtuální scény	1 den	28.11.2013	
Ověření správné funkce počítačového modelu	3 dny	02.12.2013	
Statická převodní charakteristika motoru	3 dny	05.12.2013	
Identifikace přechodové charakteristiky	1 týden	12.12.2013	
Verifikace modelu	1 týden	19.12.2013	
Kapitola Linearizace modelu	4 dny	05.01.2014	
Kapitola Vyšvihnutí ramena do horní polohy	2 týdny	31.01.2014	
Návrh regulátoru pro polohu vozíku	2 týdny	07.02.2014	
Návrh regulátoru pro úhel	2 týdny	14.02.2014	
Regulační smyčka	1 týden	26.02.2014	
Ověření regulátoru	2 týdny	21.03.2014	
Přepínání mezi vyšvihnutím a regulátorem	1 týden	28.03.2014	